7. INTEGRALES DE SUPERFICIE

7.1. Superficies

Definición de superficie

Se dice que $S \subset \mathbb{R}^3$ es una **superficie** si existe una aplicación continua e inyectiva (salvo quizás en la frontera) $\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^2$ conexo con $\overset{\circ}{D} \neq \emptyset$, tal que $\Phi(D) = S$. La aplicación Φ se llama **parametrización** de la superficie S, y se suele indicar: $\Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$.

Una superficie admite infinitas parametrizaciones.

Superficies diferenciables

La superficie S parametrizada por $\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^2$, se dice que es una **superficie diferenciable** si $\Phi \in \mathcal{C}^1(D)$, salvo quizás en la frontera ∂D.

Son **vectores tangente** y **vector normal** a la superficie en $\Phi(u_0, v_0)$, respectivamente, los vectores:

$$\begin{cases} \mathbf{T}_u = \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u_0,v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)(u_0,v_0) \\ \mathbf{T}_v = \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u_0,v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)(u_0,v_0) \end{cases} \qquad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v}{\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|} = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}}{\left\|\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right\|}(u_0,v_0)$$

El **plano tangente** a la superficie S en $\Phi(u_0,v_0) = (x_0,y_0,z_0)$ es:

$$\mathbf{n} \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

Se dice que la **superficie** S es **regular** o **suave** en $\Phi(u_0,v_0)$ si $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v \neq \mathbf{0}$, y se dice que es regular o suave en D si lo es en todos los puntos de D, salvo quizás en la frontera ∂D o en un número finito de puntos de su interior.

Ejemplos

1. El plano π que pasa por $P(x_0,y_0,z_0)$, $Q(x_1,y_1,z_1)$ y $R(x_2,y_2,z_2)$ es una superficie regular parametrizada por $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$\Phi(u,v) = \overrightarrow{OP} + u\overrightarrow{PQ} + v\overrightarrow{PR} \quad \text{o también} \quad \begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)u + (x_2 - x_0)v \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)u + (y_2 - y_0)v \\ z = z_0 + (z_1 - z_0)u + (z_2 - z_0)v \end{cases}$$

Los vectores tangente y normal son, respectivamente, los vectores constantes:

$$\begin{cases} \mathbf{T}_u = \overrightarrow{PQ} \\ \mathbf{T}_v = \overrightarrow{PR} \end{cases} \qquad \mathbf{n} = \frac{\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}}{\left\|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\right\|}$$

2. Cualquier función continua $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ conexo con $\overset{\circ}{D} \neq \emptyset$, define una superficie S parametrizada por:

$$\begin{aligned} \Phi : D &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u,v) &\longrightarrow \Phi(u,v) = (u,\ v,\ f(u,v)) \end{aligned}$$

Si $f \in \mathcal{C}^1(D)$, la superficie es diferenciable y regular, siendo los vectores tangente y normal, respectivamente:

$$\begin{cases} \mathbf{T}_u = \left(1,\ 0,\ \frac{\partial f}{\partial u}\right) \\ \mathbf{T}_v = \left(0,\ 1,\ \frac{\partial f}{\partial v}\right) \end{cases} \qquad \mathbf{n} = \frac{\left(\frac{-\partial f}{\partial u},\ \frac{-\partial f}{\partial v},\ 1\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2}}$$

3. La esfera de radio $r > 0$ centrada en el origen es una superficie parametrizada por

$$\begin{aligned} \Phi \,:\, [0,2\pi]\times[0,\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta,\varphi) &\longrightarrow \Phi(\theta,\varphi) = (r\cos\theta\sin\varphi,\, r\sin\theta\sin\varphi,\, r\cos\varphi) \end{aligned}$$

Con esta parametrización, la esfera es una superficie diferenciable y regular (salvo en los puntos $(0,0,\pm r)$), siendo sus vectores tangente y normal:

$$\begin{cases} \mathbf{T}_\theta = (-r\sin\theta\sin\varphi,\, r\cos\theta\sin\varphi,\, 0) \\ \mathbf{T}_\varphi = (r\cos\theta\cos\varphi,\, r\sin\theta\cos\varphi,\, -r\sin\varphi) \end{cases}$$

$$\mathbf{n} = \big(-r^2\cos\theta\sin^2\varphi, -r^2\sin\theta\sin^2\varphi, -r^2\sin\varphi\cos\varphi\big) = (-r^2\sin\varphi)\Phi(\theta,\varphi)$$

4. El cono $x^2+y^2=z^2$ es una superficie parametrizada por:

$$\begin{aligned} \Phi \,:\, \mathbb{R}\times[0,2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r,\theta) &\longrightarrow \Phi(r,\theta) = (r\cos\theta,\, r\sin\theta,\, r) \end{aligned}$$

Con esta parametrización, es una superficie diferenciable y regular (excepto en el origen), siendo sus vectores tangente y normal:

$$\begin{cases} \mathbf{T}_r = (\cos\theta,\, \sin\theta,\, 1) \\ \mathbf{T}_\theta = (-r\sin\theta,\, r\cos\theta,\, 0) \end{cases} \qquad \mathbf{n} = \frac{-1}{\sqrt{2}}(\cos\theta,\, \sin\theta, -1)$$

5. El hiperboloide $x^2+y^2-z^2=1$ es una superficie regular parametrizada por:

$$\begin{aligned} \Phi \,:\, \mathbb{R}\times[0,2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r,\theta) &\longrightarrow \Phi(r,\theta) = \Big(\sqrt{1+r^2}\cos\theta,\, \sqrt{1+r^2}\sin\theta,\, r\Big) \end{aligned}$$

6. El **helicoide** es la superficie regular parametrizada por:

$$\begin{aligned} \Phi \,:\, [0,1]\times[0,2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r,\theta) &\longrightarrow \Phi(r,\theta) = (r\cos\theta,\, r\sin\theta,\, \theta) \end{aligned}$$

Ejemplo

Halla el plano tangente a la superficie S parametrizada por $\Phi(u,v) = (u\cos v,\, u\sin v,\, u^2+v^2)$, $(u,v)\in\mathbb{R}^2$, en el punto $\Phi(1,0) = (1,0,1)$.

Observación: A partir de ahora, se entenderá que **todas las superficies son regulares o uniones superficies regulares**, salvo quizás en un número finito de puntos.

Área de una superficie

Si S es una superficie regular parametrizada por $\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $D\subset\mathbb{R}^2$, se define su **área** como la integral:

$$A(S) = \iint_D \|\mathbf{T}_u\times\mathbf{T}_v\|\, du\, dv = \iint_D \left\| \frac{\partial\Phi}{\partial u}\times\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right\| du\, dv$$

El área de una superficie no depende de la parametrización elegida para su cálculo.

Ejemplos

1. Calcula el área del trozo de cono parametrizado por $\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta,\, r\sin\theta,\, r)$, $0\le r\le a$ y $0\le\theta\le 2\pi$.

2. Calcula el área del **toro** con radio interior $r>0$ y exterior $R>r$, cuya parametrización es:

$$\begin{aligned} \Phi \,:\, [0,2\pi]\times[0,2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta,\varphi) &\longrightarrow \Phi(\theta,\varphi) = ((R+r\cos\varphi)\cos\theta,\, (R+r\cos\varphi)\sin\theta,\, r\sin\varphi) \end{aligned}$$

Área del grafo de una función

Si $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, es una función de clase $\mathcal{C}^1$, su grafo $G(f) = \{(x,\, y,\, f(x,y)) \,:\, (u,v) \in D\}$ es una superficie regular que tiene por área:

$$A(G(f)) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy$$

Áreas de superficies de revolución

Al girar el grafo de la función $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, de clase $\mathcal{C}^1$, alrededor del eje de abscisas, se obtiene una superficie de revolución S regular cuyo área es:

$$A(S) = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

Ejercicios

1. Para cada una de las siguientes superficies, calcula vectores tangentes y normal (determinando su regularidad) y, si es posible, esboza su gráfica:

(a) $\Phi(u,v) = (u, u^2 + v, v^2)$
(b) $\Phi(r,\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, r)$
(c) $\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, r^2)$
(d) $\Phi(\theta,\varphi) = (2\cos\theta\sin\varphi, 3\sin\theta\sin\varphi, \cos\varphi)$

2. Encuentra una parametrización de la superficie $z = x^2 + 3xy - y^2$, y úsala para hallar el plano tangente en el punto $(2,-1,-3)$.

3. Halla el vector unitario que apunta hacia adentro del hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. ¿Cuál es su plano tangente en el punto $(1,1,1)$?

4. Halla el área de las siguientes superficies:

(a) El helicoide parametrizado por $\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \theta)$, $(r,\theta) \in [0,1] \times [0,2\pi]$.
(b) La parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ interior al cono $x^2 + y^2 = z^2$.

5. Halla el área de la superficie que resulta después de perforar la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ con dos cilindros de radio unidad tangentes entre sí y al eje z.

Soluciones y/o sugerencias a los ejercicios:

1. (a) $\mathbf{T}_u = (1,\, 2u,\, 0)$, $\mathbf{T}_v = (0,\, 1,\, 2v)$ y $\mathbf{n} = \frac{(4uv,\, -2v,\, 1)}{\sqrt{16u^2v^2 + 4v^2 + 1}}$.
(b) $\mathbf{T}_r = (0,\, 0,\, 1)$, $\mathbf{T}_\theta = (-\sin\theta,\, \cos\theta,\, 0)$ y $\mathbf{n} = (-\cos\theta,\, -\sin\theta,\, 0)$.
(c) $\mathbf{T}_r = (\cos\theta,\, \sin\theta,\, 2r)$, $\mathbf{T}_\theta = (-r\sin\theta,\, r\cos\theta,\, 0)$ y $\mathbf{n} = \frac{(-2r\cos\theta,\, -2r\sin\theta,\, 1)}{\sqrt{1+4r^2}}$.
(d) $\mathbf{T}_\theta = (-2\sin\theta\sin\varphi,\, 3\cos\theta\sin\varphi,\, 0)$, $\mathbf{T}_\varphi = (2\cos\theta\cos\varphi,\, 3\sin\theta\cos\varphi,\, -\sin\varphi)$.
2. Por ejemplo: $\Phi(u,v) = (u,\, v,\, u^2 + 3uv - v^2)$, $u, v \in \mathbb{R}^2$. Plano tangente: $x + 8y - z + 3 = 0$.
3. Vector: $\frac{(-\cos\theta\cosh u,\, -\sin\theta\cosh u,\, \sinh u)}{\sqrt{\cosh 2u}}$; Plano tangente: $y - 1 = 0$.
4. (a) $(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}))\pi$. **(b)** $2(2-\sqrt{2})\pi$.
5. 32.